FACTORIZACIÓN EN Z , Q , IR

1. DEFINICIÓN:

Factorizar es el proceso que consiste en transformar un polinomio entero y de coeficiente racionales, en un producto indicado de potencias de sus factores primos también racionales enteros y de coeficientes racionales.

Factorizando:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

Términos del Polinomio — Factores

2. CRITERIOS DE FACTORIZACIÓN:

No existe un método específico para factorizar a una expresión ya que ésta puede hacerse por dos o más procedimientos denominados también criterios. Algunos de ellos son:

1) Factor común y/o agrupamiento de términos
2) Criterio de identidades (aplicando los diferentes casos de productos notables)
3) Criterio del aspa:
   - Aspa simple
   - Aspa doble
   - Aspa doble especial
4) Criterio de evaluación o divisores binomios
5) Criterio para factorizar Polinomios recíprocos
6) Criterio para factorizar expresiones simétricas y alternadas.
7) Criterio de los artificios de cálculo:
   - Cambio de variables
   - Sumas y restas especiales, etc.

3. FACTOR O DIVISOR:

El factor de una expresión es aquél que la divide exactamente. Ejemplos:

A.B. = C $\rightarrow$ A y B son factores de C

5x11 = 55 $\rightarrow$ 5 y 11 son factores de 55

$x(x+2) = x^2 + 2x \rightarrow$ (x) y (x+2) son factores de $x^2 + 2x$

4. FACTOR PRIMO:

Es aquel que sólo acepta descomponerse en dos factores (divisores); la unidad y el propio factor; se dice también que es una expresión no factorizable

Ejemplos:

$x(x+2)(y^2+2y)$

- (y^2+2y) — Factor no primo
- $(x+2)$ — Factor Primo
- x — Factor Primo

CRITERIO DEL FACTOR COMÚN:

El factor común se extrae de cada término, elevado a su menor exponente.

Ejemplo (1): Factorizar:

$$x^4 y^3 + x^2 y^5 = \underbrace{x^2 y^3 (x^2 + y^2)}_{\text{Expresión Factorizada}}$$

Ejemplo (2):

Factorizar: $x^4 a + x^4 y + z^4 a + z^4 y$

Resolución

Extraemos factor común monomio de la agrupación indicada:

$$\left(x^4 a + x^4 y\right) + \left(z^4 a + z^4 y\right)$$

$$x^4 (a+y) + z^4 (a+y)$$

Extraemos el factor común polinomio:

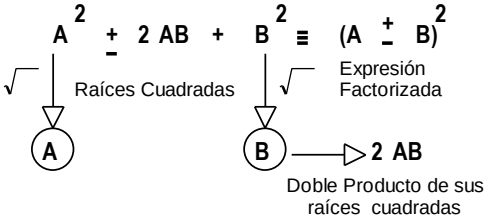
$(a+y)(x^4 + z^4) \rightarrow$ Expresión factorizada

CRITERIO DE LAS IDENTIDADES:

En este caso utilizaremos los productos notables.

A) FACTORIZAR UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$\underbrace{A^2 \pm 2AB + B^2}_{\text{Trinomio cuadrado Perfecto}} \equiv \underbrace{(A \pm B)^2}_{\text{Expresión Factorizada}}$$



OBSERVACIÓN:

El trinomio cuadrado perfecto es el desarrollo de un binomio al cuadrado, se caracteriza porque el doble producto de la raíz de dos de sus términos es igual al tercer término.

Todo trinomio cuadrado perfecto se transforma en binomio al cuadrado.

Ejemplo: Factorizar:

$$16x^2 + 40xy^3 + 25y^6 = \underbrace{\left(4x + 5y^3\right)^2}_{\text{Expresión Factorizada}}$$

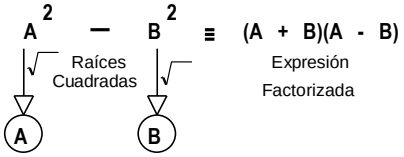
$4x$ $\qquad$ $5y^3$

$\underbrace{2(4x)(5y^3)}_{\text{Doble Producto}} = 40xy^3$

Es necesario tener en cuenta que donde aparecen cuadrados perfectos existe la posibilidad del trinomio cuadrado perfecto.

B) FACTORIZAR UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS:

$$\underbrace{A^2 - B^2}_{\text{Diferencia de Cuadrados}} \equiv \underbrace{(A + B)(A - B)}_{\text{Expresión Factorizada}}$$



Ejemplo (1): Factorizar: $x^4 - 4b^2$

Resolución

$$x^4 - 4b^2 = \left(x^2 + 2b\right)\left(x^2 - 2b\right)$$

$\downarrow \quad \downarrow$

$x^2 \quad 2b$

Ejemplo (2): Factorizar: $x^2 + 2xy + y^2 - z^6$

Resolución

$$\left(x^2 + 2xy + y^2\right) - z^6 = (x + y)^2 - z^6$$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad\

Ejemplo: Factorizar $27x^3 - 8$

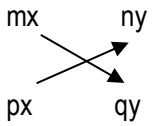
Resolución

$$27x^3-8=(3x)^3-(2)^3=(3x-2)\left(9x^2+6x+4\right)$$

CRITERIO DEL ASPA SIMPLE

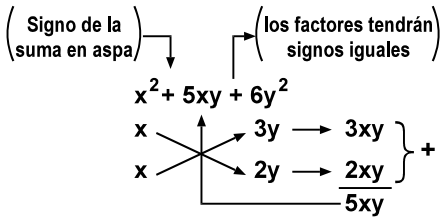
Se utiliza para factorizar expresiones trinomios o aquellas que adoptan la forma:

$$ax^2+bxy+cy^2 \equiv \underbrace{(mx+ny)(px+qy)}_{\text{Expresión Factorizada}}$$

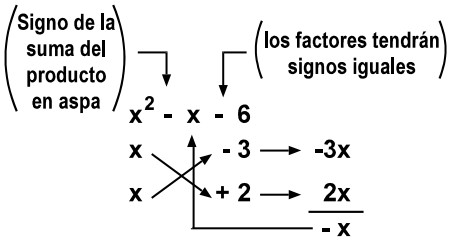


Ejemplo 1:

Factorizar $x^2+5xy+6y^2$ = (x – 3y)(x + 2y)



Ejemplo 2: Factorizar x^2-x-6



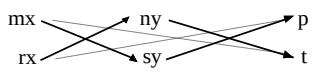
x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)

CRITERIO DEL ASPA

ASPA DOBLE:

Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

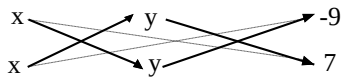
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$$



$$\underbrace{(mx+ny+p)(rx+sy+t)}_{\text{Expresión Factorizada}}$$

Ejemplos:

$$x^2+2xy+y^2-2x-2y-63$$



La expresión factorizada es:

(x + y – 9) (x + y + 7)

ASPA DOBLE ESPECIAL

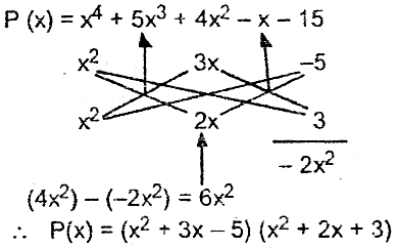
Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

REGLA:

1. Se descompone el término de mayor grado y el término independiente; se calcula la suma del producto en aspa.
2. A la suma obtenida se le agrega la ex presión que haga falta para ver el término central. La expresión agregada es la que se descompone para comprobar los otros términos del polinomio.

Ejemplo:



$\therefore$ P(x) = $(x^2 + 3x - 5)(x^2 + 2x + 3)$

ASPA TRIPLE:

Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dyz + Ez^2 + Fxz + Gx + Hy + Iz + J$

CRITERIO DE DIVISORES BINOMIOS O EVALUACIÓN

Se utiliza para factorizar polinomios de cualquier grado siempre que tenga por lo menos un factor de primer grado.

Regla:

1. Se calcula los valores de las variables que anulen al polinomio
2. Se divide por Ruffini al polinomio entre el factor o factores binomios obtenidos, para obtener el factor que falta.

Regla para obtener los posibles "ceros"

1. Si el coeficiente del término de mayor grado es la unidad, los posibles "ceros" son los divisores del término independiente.

2. Si el coeficiente del término de mayor grado es diferente de la unidad, los posibles "ceros" serán los divisores del término independiente divididos por los divisores del coeficiente del término de mayor grado.

Ejemplo: $x^2 - x + 6$

Posibles ceros: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Ejemplo: $7x^5 + 2x^4 - 3$

Posibles ceros: $\pm 1, \pm 3, \pm 1/7, \pm 3/7$

Ejemplo: Factorizar $x^3 + 3x - 4$

Resolución

Posibles "ceros": $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Se anula para x = 1 $\rightarrow$ (x – 1) es factor

Dividiendo por Ruffini entre (x – 1) se obtiene el otro factor.

	1	0	3	–4
1		1	1	4
	1	1	4	0

2do. Grado

La expresión factorizada es:

$$(x-1)\left(x^2 + x + 4\right)$$

MÉTODO DE LOS ARTIFICIOS

En este caso mediante sumas y restas trataremos de formar trinomio cuadrado perfecto para exponentes impares. También se pueden hacer cambios de variables.

Ejemplo:

Factorizar:

$$64x^4 + y^8$$

Solución:

Formando trinomio cuadrado perfecto:

T.C.P. $\rightarrow$ $64x^4 + y^8$

$(8x^2)^2 \quad (y^4)^2$

Falta: $2(8x^2)(y^4) \rightarrow 16x^2y^4$

Sumando y restando: $16x^2y^4$

$64x^4 + y^8 + 16x^2y^4 - 16x^2y^4$

T.C.P.

$$(8x^2 + y^4)^2 - (4xy^2)^2$$

$$(8x^2 + y^4 + 4xy^2)(8x^2 + y^4 - 4xy^2)$$

PROBLEMAS DE CLASE

1. Factorizar:
$P(a; b; c) = ab^2 + ac^2 + bc^2 + a^2b + a^2c + b^2c + 3abc$

Indicando un factor primo.

a) $a^2 + b^2 + c^2$ b) $a - b - c$ c) $a + b + c$

d) $a^3 + b^3 + c^3$ e) $a + b$

2. Factorizar:
$F(x) = (x^2 + 2)^2 - (2x - 1)^2$

El factor que más se repite es:

a) $x + 1$ b) $x – 1$ c) $x + 2$

d) $x – 2$ e) $x - 3$

3. Factorizar:
$F(x) = (x + 1)^4 – (x - 1)^4$

La suma de coeficientes del factor primo cuadrático es:

a) 1 b) 2 c) 3

d) -2 e) -1

4. Factorizar:
$F(x) = x^3 + x^2 – 9x - 9$

Indicando un factor primo.

a) $x – 1$ b) $x – 2$ c) $x - 3$

d) $x + 5$ e) $x + 7$

5. Factorizar: $P_{(x)} = x^6 - 4x^4$

Indicando un factor primo.

A) $x + 6$ B) $x - 4$ C) $x + 2$

d) $x - 6$ E) $x + 4$

6. Factorizar: $P_{(x,y)} = x^3 - 64y^3$

A) $(x - 4y)^3$

B) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$

C) $(x - 4y)(x + 4y)^2$

D) $(x - 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$

E) $(x + 4y)(x - 4y)^2$

7. Factorizar:
$F(x) = (x + 1)^4 – 5(x + 1)^2 + 4$

E indicar el término independiente de un factor primo.

a) 1 b) 2 c) 4

d) -2 e) -3

8. Factorizar:
$Q(x) = (x^2 + 5)^2 + 13x(x^2 + 5) + 42x^2$

Indique la suma de coeficientes de un factor primo.

a) 5 b) 6 c) 2

d) 4 e) Hay 2 respuestas

9. Luego de factorizar: $12x^2 – 7x – 10$ indicar la suma de los factores primos obtenidos.

A) $7x – 3$ B) $x – 3$ C) $x + 7$
D) $6x – 3$ E) $2x + 5$

10. Si un factor de: $(a + b)2 + (a – b)2 – 5ab$ se igual a cero, se obtiene:

A) $a = b$ B) $a = 2b$ C) $a = – b$
D) $2a = 3b$ E) $a = 3b$

11. Luego de factorizar:
$12(x + y)^2 + 7(x + y) – 12$

A) $(4x – 4y – 3)(3x – 3y + 4)$
B) $(4x + 4y – 3)(3x + 3y + 4)$

C) (4x – 4y + 3) (3x + y – 4)
D) (3x + 4y + 3) (4x + 3y – 4)
E) (6x + y +2) (2x – y – 6)

12. Factorizar: $x^4 - 10x^2 + 9$ e indicar sus factores primos.

A) 4x + 5 B) 4x + 4 C) 4x + 3
D) 4x + 1 E) 4x

13. Indicar el número de factores primos de:

$P_{(x)} = (x^2 + 7x + 5)^2 + 3(x^2 + 1) + 21x + 2$

A) 3

B) 5

C) 7

D) 4 E) 2

14. Indicar la diferencia de los factores primos de:

$E_{(a;b;c)} = a^2 - 2ab + b^2 - c - 2c - 1$

A) 2c + 4 B) 2a + 2b C) 2c + 2
D) a – b E) (a – b) – c

15. Uno de los factores de:

$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad + 2bc$; es:

A) b+c+a–d B) b–c+a+d C) b+c–a–d
D) b–c+a–d E) a+b+c+d

16. Factorizar:
F(x; y) = $4x^2 - 13xy + 10y^2 + 12x - 15y$

Señalar un factor primo:

a) x + 2y + 3 b) 4x + 5y c) 4x – 5y
d) 4x + 2y + 3 e) 4x – 2y + 3

17. Hallar la suma de los factores primos de primer grado, del polinomio:
$(x + 3)^4 - x^2 (x + 6)^2 - 81$

a) $x^2 + x$ b) 2x + 6 c) $x^2 + 6x$
d) 19x + 6 e) 6x – 1

18. La suma de los términos independientes de los factores primos de
$x^{14} + x^{12} + x^{10} + \ldots\ldots + x^2 + 1$, es:

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

19. Indicar el número de factores primos de: $x^{12} + x^8 + x^4$

a) 4 b) 3 c) 5
d) 9 e) 10

20. Factorizar $64y^2x^7 - y^2x$ e indicar el número de factores primos.

a) 4 b) 6 c) 7
d) 9 e) 96

21. Factorizar:
$P(a, b, c) = a(a^2 + bc) + c(a^2 + b^2) - b^3$;

e indique un factor:

A) a + b + c B) $a^2 + b^2$ C) $b^2 + c^2$

D) a – b + c E) $a^2 + bc$

22. Si:

$M = 6x^2 + x - 12$ y $N = 10x^2 + 13x - 3$

El factor primo lineal común de M y N es:

a) $5x - 1$ b) $2x + 3$ c) $2x + 5$
d) $3x - 4$ e) $3x + 2$

23. Con respecto a la expresión:

$N(x; y) = 4x^4y - 4x^3y^2 - 24x^2y^3$

Señale si es verdadero o falso:

( ) Un factor es $(x - 3y)$

( ) Un factor es $(x + 2y)$

( ) Tiene más de dos factores primos

A) VVF B) VFV C) FVF

D) FFV E) VVV

24. Factorizar:

$M(x; y) = x^4 + 14x^2 + 49 - y^4$

Indique la suma de coeficientes de un factor primo

A) 9 B) 6 C) 11

D) 4 E) 8

25. Factorizar:

$P(x, y) = 5x^2 + 16xy + 3y^2 + 11x + 5y + 2;$

señalar un factor primo.

A) $x + 3y + 1$
B) $x - y + 1$
C) $x + 3y + 2$
D) $5x + y + 6$
E) $2x + y + 5$

26. Factorizar:

$N(x, y) = 8x^2 + 2xy + 28x + 13y + 24;$

y señalar el factor primo trinomio:

A) $2x + 3y + 3$
B) $4x + y + 8$
C) $2x + 3y + 1$
D) $2x - 3y + 2$
E) $4x + y + 4$

27. Indique uno de los factores primos en:

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$

A) $x^2 + 2x + 2$
B) $x^2 + 2x + 1$
C) $x^2 - x + 3$
D) $x^2 + x + 2$
E) $x^2 - 2x + 1$

28. La suma de coeficientes de un factor primo de:

$T(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10$, es

A) 1 B) –6 C) 2
D) –2 E) 8

29. Factorizar:

$P(x) = 3x^4 - x^3 - 23x^2 + 9x - 36;$

dar el factor primo de mayor grado.

A) $3x^2 - x + 9$
B) $x + 3$
C) $3x^2 - x - 3$
D) $x - 3$
E) $3x^2 - x + 4$

30. Método de los divisores binómicos:

Factorizar:

a) $x^3 + 2x^2 - 8x - 21$

b) $x^3 + 7x^2 + 15x + 12$

c) $x^3 - 3x^2 - 16x - 12$

31. Factorice $3x^3 + 11x^2 + 28x + 30$ y dé como respuesta la suma de los términos independientes de sus factores primos.

a) 5 b) 9 c) 7 d) 11 e) 3

32. Factorizar:

$P(x) = 4x^5 - 29x^3 - 24x^2 + 7x + 6$

y dar como respuesta el número de factores primos que tiene.

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

33. Hallar la suma de coeficientes de un factor primo del polinomio $Q(x) = x^3 - x^2 - 17x + 33$

A) -3 B) -6 C) -7 D) -5 E) -8

34. Factorizar:

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 3x - 1$ e indicar la suma de los coeficientes de uno de los factores primos.

A) 3 B) 1 C) 5 D) 6 E) 7

35. Factorizar

$x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 3$, indicar el número de factores.

A) 2 B) 1 C) 4 D) 3 E) 5

36. Indica el factor primo de menor grado de multiplicidad:

$E(x) = 2x^5 + 9x^4 + 16x^3 + 14x^2 + 6x + 1$

A) $x - 1$ B) $2x - 1$ C) $x + 1$ D) $2x + 1$ E) $x + 2$

37. Luego de factorizar el polinomio $P(x) = 12x^3 - 44x^2 + 51x - 18$, determinar la suma de los factores primos de dicho polinomio.

A) $5x - 4$ B) $5x - 5$ C) $5x - 6$ D) $5x - 7$ E) $5x - 8$

38.Factorizar

$P(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 4$

e indicar el factor primo con mayor suma de coeficientes.

A) $x + 4$ B) $2x + 3$ C) $x - 1$ D) $x + 2$ E) $x + 1$

39. Factorizar: $4x^2 - 20xy + 9y^2$, señalar el término de un factor primo.

a) x b) – y c) y d) 9y e) 2

40. Luego de factorizar

$49x^4 - 11x^2 + 25$, indique la suma de coeficientes de un factor primo

a) 7 b) 13 c) 14 d) 19 e) 21

41. La suma de los factores primos lineales de:

$F = x^2(y - z) - y^2(z - x) + z^2(x + y) - 2xyz$.

es

a) x + y b) 2x c) 2y d) 2x + 2y – 2z e) x + y – z

42. Factorizar :

$(x + y)\,x^2 + (x^2 + z^2)xy + (x+y)z^2$ e indicar un factor primo

a) x + y b) x + xy c) $x^2 + z$ d) $x^2 + z^2$ e) x + y + z

43. Indique el número de factores primos al factorizar el polinomio: $x^5 + x^4 + 1$, es

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 8

44. Uno de los factores primos cuadráticos de:

$x^5 + x^3 + x^2 + 2x + 1$, es :

a) $x^2 + 1$ b) $x^2 - x + 1$
c) $x^2 + 3$ d) $x^2 - x - 1$
e) $x^2 + x + 1$

45. Determinar el número de factores primos cuadráticos que se obtiene al factorizar $x^{10} + x^8 + 1$
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

46. Al factorizar el polinomio $p(x)=(x-1)^5+x$, si $m(x)$ es el factor primo de mayor coeficiente lineal, hallar $m(2)$.
A) 2 B) 1 C) 3
D) 5 E) 4

47. Dado el polinomio $x^5+3x^4-4x^2-4x-1$, hallar la suma de coeficientes de los términos lineales de sus factores primos mónicos.
A) 5 B) 1 C) 4
D) 2 E) 3

48. Calcular la suma de los factores primos no cuadráticos del polinomio $x^{10}+2x^6+x^2-1$. A) $3x-1$ B) $4x+5$ C) x^5+x^3
D) x^2+1 E) $2x^3$

49. Si la suma de los factores primos lineales del polinomio $P(x)=x^7-4x^6+11x^4-6x^3$ es equivalente a $Ax+B$, hallar el valor de $E=\left(\frac{1}{A}\right)^B$.
A) 81 B) 32 C) 216
D) 63 E) 243

50. Luego de factorizar el polinomio $p(x)=6x^4-2x^3-29x^2+12x-42$ se obtiene un factor trinomio de a form ax^2+bx+c, $(b\neq 0)$. Hallar la suma de los factores primos del polinomio $q(x)$, si $3q(x)=ax^2-(a+c-b)x+(c-b)$
A) $3x+8$ B) $3x-4$ C) $2x+6$ D) $3x$
E) $2x-3$

51. Indique el coeficiente del término lineal del factor primo del menor grado al factorizar $x^5-x^4+2x^2-2x+1$.
A)1 B)2 C)-1
D)-2 E)0

52. Si $(x+1)^2$ es un factor del polinomio $p(x)=x^4+mx^3+8x^2+mx+1$, determine el valor de m
A)1 B)2 C)3
D)4 E)5

TAREA DOMICILIARIA

1. Factorizar:
$P(x; y) \equiv x^5y^4 + x^5y^2 + x^3y^4 + x^3y^2$

e indicar un factor primo.

a) x + y b) $x^2 + y^2$ c) x + 1
d) xy + 1 e) $y^2 + 1$

2. Indicar un factor primo al factorizar la suma de los factores primos de:
$P(a; x) \equiv abx^2 + aby^2 + xya^2 + xyb^2$

a) a + y b) b + x c) x + y
d) a – b e) b – x

3. Factorizar:
$F(x) \equiv (x - 3)(x - 2)(x - 1) + (x - 1)(x - 2) - (x - 1)$

e indicar la suma de sus factores primos.

a) 2x – 4 b) 3x – 5 c) 3x - 6

d) 2x – 3 e) 3x - 4

4. Factorizar:
$P(x; y) = y^2 – x^2 + 6x - 9$

e indicar el factor primo de mayor suma de coeficientes.

a) x + y – 3 b) x – y + 3 c) y + x + 3

d) x + y – 3 e) 3 – x + y

5. Factorizar:
$F(x; y) = 12x^2 + 6y^2 + 17xy$

e indicar el valor numérico de uno de sus factores primos para x = 3; y = 2.

a) 13 b) 16 c) 20

d) 18 e) A ∧ D

6. Indicar un factor primo en:
$F(a; b) = (a + b + 2)^2 + 11a + 11b + 40$

a) a + b + 5 b) a + b + 8 c) a + b + 9

d) a + b – 7 e) a + b + 4

7. ¿Cuántos factores primos resultan en?
$P(x; y) = x^9y – x^3y^7$

a) 2 b) 3 c) 4

d) 5 e) 6

8. Indicar el número de factores primos en:
$P(x) = (3x^2 – 4x)^2 – 19(3x^2 – 4x) + 60$

a) 2 b) 3 c) 4

d) 5 e) 8

9. Si un factor primo de:
$H(x) = x^4 – 13x^2 + 36$

Toma la forma (ax + b), donde: a + b = -2

Hallar el valor de a – b

a) 2 b) 1 c) 4

d) -2 e) 0